相手に関する情報を得ることは有利か? : 情報収集に関する最適化問題のモデル化 (新しい生物数学の研究交流プロジェクト)

AUTHOR(S):

大竹, 洋平; 齊藤, わか; 管家, 千誠; 吉田, 信介

数理解析研究所講究録
第 1598 巻 2008 年 11-28

相手に関する情報を得ることは有利か?: 情報収集に関する最適化問題のモデル化

Is it Advantageous to Obtain Information about Others?: Modeling of Optimization Problem on Information Gathering

A班：* 大竹洋平・** 齊藤わか・*** 管家千誠・**** 吉田信介
* 東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻，〒153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1 東京大学生産技術研究所 Ce-605
** 京都大学 農学部 森林科学科 森林生態学分野，〒606-8502 京都市左京区北白川追分町
*** 横浜国立大学大学院 環境情報学府 環境リスクマネジメント専攻，〒240-8501 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7
**** 大阪大学 歯学部，〒565-0781 大阪府吹田市山田丘 1-8

***Yo-Hey OTAKE, **Waka SAITO, ***Kazumasa SUGAYA, ****Shinsuke YOSHIDA**

**Department of Mathematical Informatics, Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo. Ce-605, Institute of Industrial Science, University of Tokyo. 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8505 JAPAN*
***Laboratory of Forest Ecology, Department of Forest and Biomaterials Science, Faculty school of Agriculture, Kyoto University. Oiwake-Cho Kitashirakawa, Sakyo-ku, Kyoto City, Kyoto 606-8502 JAPAN*
****Department of Risk Management and Environmental Sciences, Graduate School of Environment and Information Sciences, Yokohama National University. 79-7 Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama City, Kanagawa 240-8501 JAPAN*
*****Faculty of Dentistry, University of Osaka. 1-8 Yamadaoka, Suita City, Osaka 565-0781 JAPAN*

* yoheyo@sat.t.u-tokyo.ac.jp
** wakas@kais.kyoto-u.ac.jp
*** d07hf023@ynu.ac.jp
**** snyosida@yahoo.co.jp

We model the information gathering behavior on the acquisition of resources. Our models are optimization problem of expected profit by a variable of dividing effort to gather information. We carried out mathematical analysis and consequently attained below understanding. Optimal value of the model is depends on the efficiency of gathering information and the increments of payoff by acquiring information. In addition, we discuss the extension of our models in order to describe many phenomena: the mistake of information, the multiple choices of strategies, the self belief and so on. These discussions are the foundation of game theoretical approach of information and the possibilities of application are in many field: ecology, economics, politics, and information sciences.

1 はじめに

現代社会は，情報化社会と称される．資源獲得の主体（例えば個人・企業・団体など）は，競争する相手に関する情報を収集することで，獲得資源量を増やすことができる．すなわち情報は資源獲得のツールとして利用することができる．このような情報の価値が一般的に認識されていることは，情報の受け渡しがサービス業の大きな一部門として成立していることからも明らかである．しかし情報化社会は，有用な情報を労せずして得られる社会を意味するのではない．むしろ，情報化社会において有用な情報を収集するためには多くの労力（または金銭・時間など）が必要である．では最終的な獲得資源を最大にするためには，限られた労力のうちのどれだけを情報収集に費やせばよいだろうか．情報は抽象性の高いツールといえるので，この問題を考える際には，情報という事象が持つ特性をよく考慮する必要がある．資源獲得の戦略については，生物学や経済学の分野で研究がなされてきたが，今回は情報の特性を考慮した2通りの資源獲得モデルを構築する．一つは，情報を確実性という側面から捉えたモデルであり，もう一つは情報の“中身”に着目したモデルである．よって本稿の構成は以下とする．まず2章で，情報の確実性の観点を捉えたモデル（基本モデル）を立てるとともに，その解析を行う．次に3章で，情報の中身に着目したモデルとして2章の基本モデルの拡張可能性について議論する．最後に4章で，研究の今後の発展を述べてまとめとする．

2 情報収集コストのモデル（基本モデル）

情報が持つ重要な側面として“確実性”が上げられる．得られた情報が確実であるほどツールとしても有用であるといえる．そこで本章では，情報を確実性という側面から捉えた資源獲得モデルを構築していく．2.1節では，情報の価値を情報の確実性によって表す基本モデルの構成過程を示すとともに，情報の価値の最適化に必要な条件を述べる．2.2節では，情報の確実性を表す関数の凸性だけを仮定して，幾つかの作図を利用して，情報の価値の最適化問題を解く．2.3節では，さらに情報の確実性を表す関数に具体的な関数をあてはめて解析し，関数の凸性の差異を明らかにする．最後に，本章のまとめを2.4節で述べる．

2.1 基本モデルの構成

全労力のうち情報収集に使う割合をpとし，それによって得られる情報の確実性を$q(p)$とする[1]．pは割合なので，$q(p)$は区間$0 \leq p \leq 1$で定義され，連続な単調増加関数であるとする．(すなわち，情報収集に多くの労力を割くほど確実性の高い情報が手に入るということである.）さらに，$0 \leq q(p) \leq 1$の値を取り，$q(0)=0$，$q(1)=1$とする[2]．

[1]情報収集に使う割合を一定の比率pとしていることに疑問を持たれるかもしれない．一定の比率にするということは，エネルギーのありあまる個人とエネルギーの少ない個人とでは，同じ情報を収集するのにかかるコストが異なるということになるからである．その点が気になるならば，情報収集に使う労力をpという一定比率ではなく定数にするという考えや，ある程度の曲線を仮定するということも考えられる．しかし，モデルの変形や拡張は次の段階で議論することとし，ここではそのような仮定をおいて，最も単純なモデルを立てて議論を進めていく．

[2]ここで，$q(0)=0$はあまり異論はないかもしれないが，$q(1)=1$には疑問を持たれるかもしれない．現実社会では，全労力を費やした（$p=1$）としても，完全な情報は得られない（$q(1)<1$）かもしれない．も

投資量に対する獲得量を議論する際には，その獲得効率が重要である．$q(p)$ を微分可能とすれば，獲得効率は $q'(p) = \frac{dq(p)}{dp}$ で表される．本稿でも微分可能を仮定する．$q(p)$ は単調増加関数なので $q'(p) \geq 0$ である．

本稿では，$q''(p)$ の正負によって，2つのタイプの関数 $q(p)$ を定義する．

情報の確実性を表す関数 $q(p)$ の便宜的な分類

$$q''(p) < 0 \tag{1}$$

をI型と定義する．図1の(a)のような上に凸(concave)の曲線を描く関数がI型であり，情報収集への労力配分が高くなるほど獲得効率が下がってくるタイプだといえる．

$$q''(p) > 0 \tag{2}$$

をII型と定義する．図1の(b)のような下に凸(convex)の曲線を描く関数がII型であり，情報収集への労力配分が高くなるほど獲得効率が上がってくるタイプといえる．

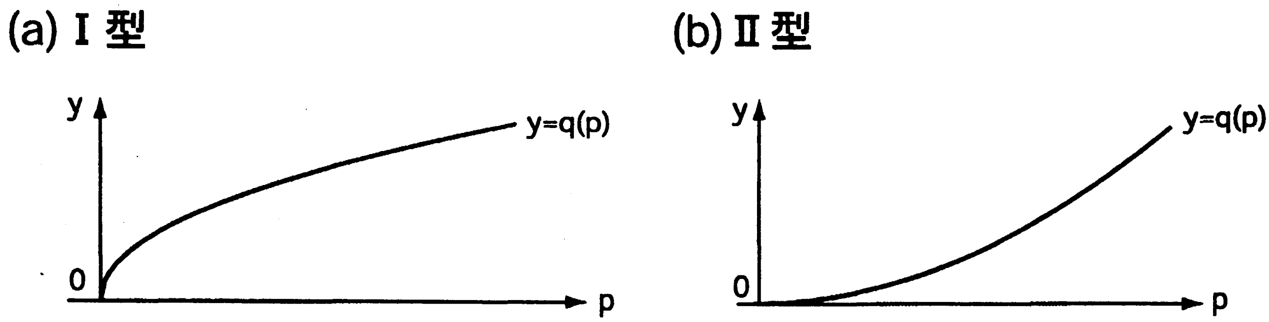

図 1: q(p) の関数型

次に，情報の確実性 $q(p)$ が資源獲得の際に果たす役割を設定し，最終的に得られる資源量の期待値 $f(p)$ を構成する．

ある戦略を実行して成功した場合 R の資源量が得られ，失敗した場合 S の資源量が得られるとする $(R > S)$．この際，より確実な情報を入手していたほうが，資源獲得に成功する確率は高くなると考えられる．よって今回は資源獲得に成功する確率を，情報の確実性 $q(p)$ で表すことにする．すなわち戦略を実行する際，確率 $q(p)$ で成功し，確率 $1 - q(p)$ で失敗すると設定する．情報の確実性に対応して得られる資源量の期待値 $E[q(p)]$ は，

$$E[q(p)] = Rq(p) + S\{1 - q(p)\} = (R - S)q(p) + S \tag{3}$$

と表せる．しかし，これは最終的な獲得資源量の期待値 $f(p)$ と等しいわけではない．すでに情報収集のため p の労力を使っているので，資源獲得そのものに向けられる分は，残

ちろん，そのような観点も入れて考察するという研究の発展も考えられるが，本稿では，その限られた範囲で解析を行うことにする．

りの $1-p$ だけとなっている．よって，最終的に得られる資源量の期待値 $f(p)$ は，以下のように表せる．

$$\begin{aligned} f(p) &= E(p)\{1-p\} \\ &= [Rq(p)+S\{1-q(p)\}](1-p) = [(R-S)q(p)+S](1-p) \end{aligned} \tag{4}$$

これを基本モデルとする．

次に，最終的に得られる資源量の期待値 $f(p)$ を最大にする p について考える[3]．情報の確実性 $q(p)$ が区間 $0 \le p \le 1$ で微分可能な関数であるとき，

$$f'(p) = \frac{df(p)}{dp} = 0 \tag{5}$$

を満たす $p = p*$ を求めればよい．そこで，

$$\left.\frac{df(p)}{dp}\right|_{p=p*} = 0 \tag{6}$$

に基本モデル (4) を代入してみよう．

まずは，$f'(p)$ を求めると，

$$f'(p) = (R-S)q'(p)(1-p) - (R-S)q(p) - S \tag{7}$$

である．よって，$f'(p) = 0$ は，以下のように変形できる．

$$q(p*) = (1-p*)q'(p*) - \frac{S}{R-S} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow q(p*) = -q'(p*)(p*-1) - \frac{S}{R-S} \tag{9}$$

よって，$p*$ は，曲線

$$y = q(x) \tag{10}$$

と直線

$$y = -q'(p*)(x-1) - \frac{S}{R-S} \tag{11}$$

との交点と考えて議論していくことができる．ここから，$f(p)$ の最適値をとる $p*$ が p の定義域の内部に存在する条件は，以下の条件 C であることがわかる．

条件 C

$p*$ が $f(p)$ の極値として存在する．
$\Leftrightarrow$ 点 A $(p*, q(p*))$ から傾き $-q'(p*)$ の直線を引いたとき，定点 B $(1, \frac{-S}{R-S})$ を通る．

これを視覚的に捉えると，図2のような作図で $p*$ を把握することが可能である．

[3]この関数 $f(p)$ の極大値を求めることは重要である．進化的なプロセスによって集団内で p をもつ個体の比率が変わっていくような場合（ないし，学習によって個体の p を変化させていくことが可能な場合には，$f(p)$ を極大化するような p の値が達成されると考えられるからである [5].

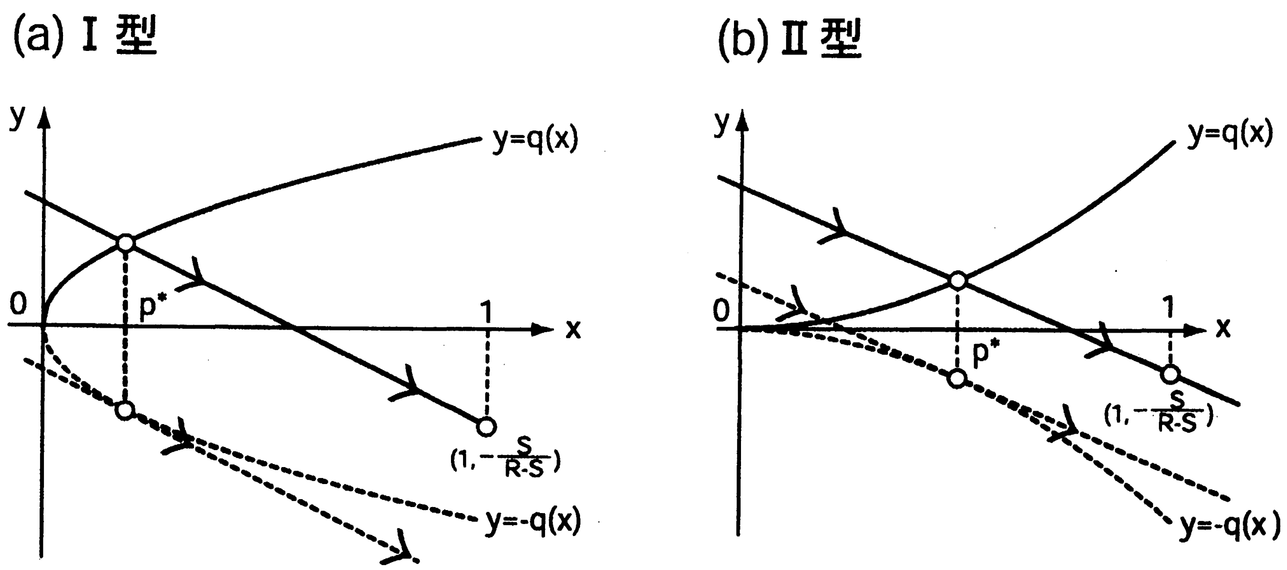

図 2: 最適な情報収集コストの求め方

2.2 R/S 比に応じた $p*$

以上のように，I 型・II 型ともに同じ条件 C で $p*$ を求めることができるが，その解析結果は関数型によって異なってくる．この後，それぞれの関数型における $p*$ の傾向をさらに詳しく検討していくが，結果としては，極値を持つ $p*$ の個数や求めるプロセスなどが異なってくることがわかる．

条件 C の定点 B $(1, \frac{-S}{R-S})$ に着目すると，定点 B の y 座標 $\frac{-S}{R-S}$ は，$-\frac{1}{\frac{R}{S}-1}$ と書き換えられる．つまり定点 B は R と S の相対的な大きさの比率で決定するということになる．具体的な例として，以下の二つの場合（両側の極限）について考察する．

1. 戦略に成功すれば非常に大きな利益が得られるが，失敗するとほとんど何も得られない場合．

2. 成功しようが失敗しようが，それほど得でもなく損でもない場合．

上記，1. の場合は，R が S に比べて大きい場合であり，$\frac{R}{S}$ が ∞ に近づく極限を考えることになる．2. の場合は，R が S と比べてほとんど同じ場合であり，$\frac{R}{S}$ が 1 に近づく極限を考えることになる（もちろん $R > S$ である）．このとき，定点 B の y 座標の極限はそれぞれ

1. の場合

$$\lim_{R/S\to\infty}\left(-\frac{1}{\frac{R}{S}-1}\right)=0 \tag{12}$$

2. の場合

$$\lim_{R/S\to 1+}\left(-\frac{1}{\frac{R}{S}-1}\right)=-\infty \tag{13}$$

であり，Rの変化にともなうy座標の変化は単調増加関数になることがわかる．

このように$S < R < \infty$の範囲[4]でRが変化する[5]と，結果として$p*$はどのようにシフトしていくだろうか．関数型の違いを反映して，このシフト方向は異なってくるであろうと予想されるが，$p*$をRとSで表すと，数式がやや煩雑になる．しかし図2を見てわかるように，ある定点Bに対して取り得る$p*$は決まる．すなわち，定点Bの座標と$p*$には対応関係があるため，$p*$をRとSの式で表さなくとも，定点Bのy座標の変化（すなわちR/Sの変化）に応じた$p*$の大まかなシフト方向を知ることは可能である．

定点Bのy座標をuとしたときに，pとの対応関係を表す関数を$u = g(p)$とする．定点Bのy座標は$\frac{-S}{R-S}$であるから，

$$\frac{-S}{R-S} = -\frac{1}{\frac{R}{S}-1} = u \tag{14}$$

である．

$R > S$であることから，この値は$u < 0$である．

uの定義 (14) を (9) 式に代入すると，

$$q(p*) = -q'(p*)(p*-1) + u \tag{15}$$

となるから，整理して再検討すると，

$$u = g(p) = q'(p)(p-1) + q(p) \tag{16}$$

が得られる．この$u = g(p)$をpに関して微分すると，

$$g'(p) = q''(p)(p-1) + 2q'(p) \tag{17}$$

が得られる．

以下，$q(p)$の形として，二つの場合にわけて議論する．I 型 (1) の場合を 2.2.1 小節に，II 型 (2) の場合を 2.2.2 小節にまとめる．

2.2.1 I 型の場合

$0 \le p \le 1$の範囲で$q(p)$は上に凸（concave）の関数だから$q''(p) < 0$であり，上式 (17) の第1項は正，また第2項も正であるため$g'(p) > 0$．よって，$g(p)$は$0 \le p \le 1$で単調増加する．また$g(0) = -q'(0) <$，$g(1) = q'(1) > 0$である．したがって，$0 \le p \le 1$の範囲に，$g(p) = 0$となるような$p = p_0$がただ1つ存在することになる（図3）．前述の通り，R, Sの性質上$g(p) < 0$であるので，取り得る$u = g(p)$の範囲は$g(0) \le g(p) < 0$である．よって，pとは最適値となり得る$p*$のことであったから，最適値をとる$p*$の範囲は$0 \le p* < p_0$である．

ここから，前述の1. や2. のようにR/Sが連続的に変化する場合に最適値$p*$がどのようにシフトしていくかを考える．

---

[4]ここで，$S > 0$を暗黙のうちに仮定しているが，$S < 0$だとどうなるかも本来考えておく必要がある．$S < 0$というのは，情報が得られないときには，損失（マイナスの利得）が得られるということである．なぜなら，

[5]結局はR/Sだけを考えることになる

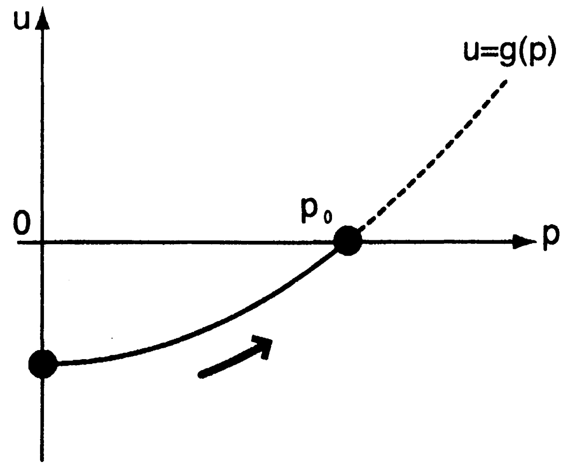

図 3: I 型の最適値 $p*$

1. R が S に比べ大きくなる（すなわち R/S が大きくなる）と，$g(p)$ も大きくなる．$g(p)$ は単調増加であるから，それにともなって p，すなわち最適値を取りうる $p*$ の値も正の方向にシフトして行き，その上限である p_0 に収束する（図 3）．

2. R が S に近づくとき，最適値を取り得る $p*$ が $0 < p \leq 1$ に存在し得る範囲は下限が決まっている．その下限は $g(0)$ であり，R/S 比が

$$\min\left\{\frac{R}{S}\right\} = g(0) = \frac{1}{q'(0)} + 1 \tag{18}$$

より下になると最適値をとる $p*$ は $p* = 0$ である．

1. の結果から，成功すれば相対的により多くの資源が得られる戦略に対しては，情報により多くの労力を割いた方がよいということがわかる．しかし R が S に対して無限に大きい場合でも，情報に費やすべき労力には上限（p_0）があることが分かった．また逆に，R/S 比がある値より低くなると，常に $p* = 0$ であることが，2. からわかった．

2.2.2 II 型の場合

$q(p)$ は下に凸（convex）の関数であるため $q''(p) > 0$ である．よって上式の第 1 項は負，第 2 項は正である．このため $g(p)$ の増減は I 型のように必ずしも単調にはならないと予想される．そこで $g'(p)$ の正負をさらに調べると，$g'(p) = 0$ となる p は（17）より，

$$q''(p)(p-1) + 2q'(p) = 0 \tag{19}$$

を満たす．上式の解が $0 \leq p* \leq 1$ の範囲に存在するかは $q(p)$ によって決定される．解が存在しないような $g(p)$ の場合，$g(p)$ は単調増加であり，$p*$ は I 型と同じ傾向を示す．解

（これを $p_{\min}$ とする）がただ1つ存在する場合，$g(p_{\min})$ が $g(p)$ の最小値となる．また I 型と同じく p_0 が存在する（図4）．よって $u = g(p)$ の取り得る値の範囲は $g(p_{\min}) \le g(p) < 0$ となり，そのとき p は $0 \le p \le p_0$ の範囲を動く．したがって，最適値をとりうる $p*$ の範囲は $0 \le p* \le p_0$ となる．

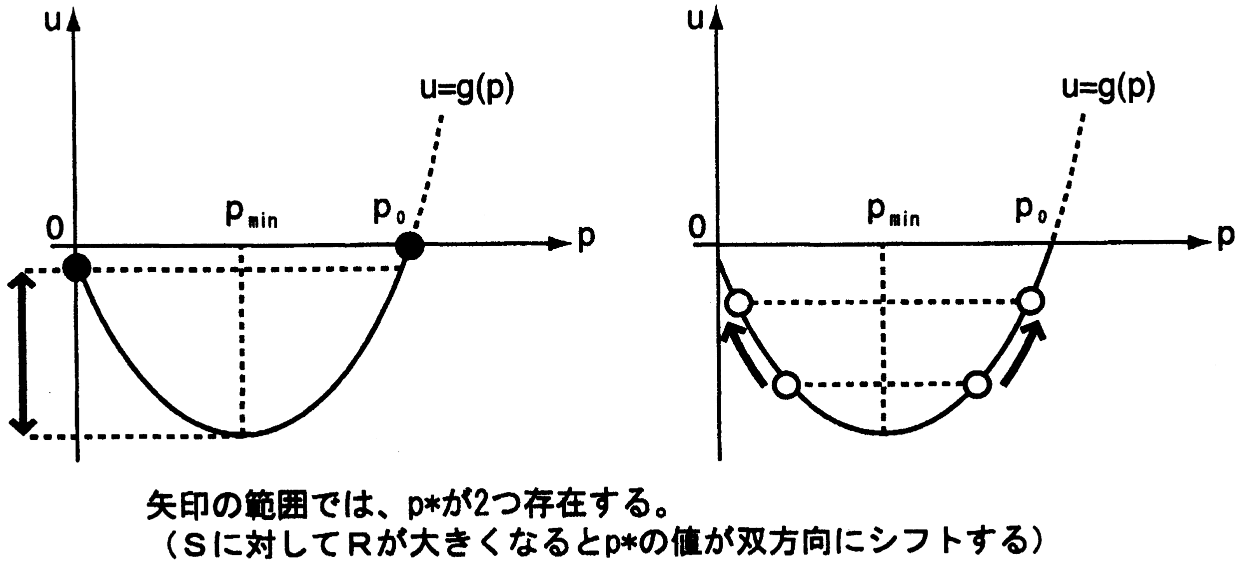

図 4: II 型の最適値 $p*$

1. R が S に比べて大きくなると，$g(p)$ は増加する．このとき，$g(p_{\min}) \le g(p) \le g(0)$ の範囲内では，p すなわち最適値をとる $p*$ が2つ存在する（図4：左）．2つの解のうち大きい方を p_{high}，小さい方を p_{low} とすると，R/S の増加に伴う解のシフト方向は，p_{high} と p_{low} で正反対になる．すなわち R/S が大きくなると p_{high} はより高いほうへ，逆に p_{low} はより低い方へシフトする．そのため R/S が高くなるにつれて2解の差は開いていく（図4：右）．

2. R が S に近づくとき，最適値 $p*$ が存在し得る範囲は，下限が決まっている．その下限は $g(p_{\min})$ であり，R/S 比が

$$\min\left\{\frac{R}{S}\right\} = g(p_{\min}) = 1 - \frac{1}{q'(p_{\min})} \tag{20}$$

より下になると最適値をとる $p*$ は定義域 $(0 < p < 1)$ の内部には存在しなくなる．この下限より下になると $p* = 0$ となるわけである．

1. の結果から，II 型には一定の範囲内で最適値が2つ存在することが分かった．情報にコストをかけたほうがよい場合と，むしろ情報にコストをかけないほうがよい場合の2パターンの戦略をとりうるということになる．また R の値が S に比べて大きくなるほど，2つの戦略の最適値は両極化していくことになる．また I 型と同様に，最適値をとる $p*$ が定義域の内部に存在しうる R/S 比には下限が存在することが2. からわかった．

2.3 情報の確実性 $q(p)$ に具体的な関数を当てはめた場合：I 型と II 型の比較

以上の結果から，R と S の相対的な大きさをシフトさせた時，$p*$ のシフト方向と数にはＩ型・II 型で異なった傾向が見られることが分かった．I 型の場合，R が大きいものほど情報にコストをかけたほうがよいという結論になるが，II 型の場合は，情報にコストをかける戦略・かけない戦略という真逆の戦略が同時に存在することが分かった．情報の取得効率の違い（つまり関数型の違い）によってなぜこのような違いが生じるのか，さらに詳しい解釈を加える必要がある．そこで今度は $q(p)$ に具体的な関数を当てはめ，I 型・II 型の最適値の違いを詳しく検討する．

具体的な例として，

$$q(p) = p^n \tag{21}$$

の場合を考えることにする．ここで，$n > 0$ である．$q(p)$ は $n < 1$ のとき I 型，$n > 1$ のとき II 型を取る．このとき，$f(p)$ は (4) より，

$$f(p) \;=\; [(R-S)p^n + S](1-p) \tag{22}$$

であり，$f'(p)$ は (7) より，

$$f'(p) \;=\; -(n+1)(R-S)p^n + n(R-S)p^{n-1} - S \tag{23}$$

である．よって，$g(p)$ は (16) に対応して，

$$g(p) \;=\; (n+1)p^n - np^{n-1} = p^{n-1}\{(n+1)p - n\} \tag{24}$$

であるから，それを微分した $g'(p)$ も (17) に対応して，

$$g'(p) \;=\; (n+1)np^{n-1} - n(n-1)p^{n-2} = np^{n-2}\{(n+1)p-(n-1)\} \tag{25}$$

となる．

以下では，I 型の場合（2.3.1 小節）と II 型の場合（2.3.2 小節）とにわけて議論していく．

2.3.1 I 型の場合 $(0 < n < 1)$

I 型の場合，

$$p_0 = \frac{n}{n+1} \tag{26}$$

である．また，

$$\lim_{p\to+0}\left[\min\left\{\frac{R}{S}\right\}\right] = -\infty \tag{27}$$

である．逆に $R \to S+$ となる場合，最適値 $p*$ は限りなく 0 に近づく．

n が小さくなるほど，$q(p)$ は立ち上がりが鋭い曲線になる（図5）．つまり n が 0 に近いほど，初期の獲得効率が高いということを示す．しかし立ち上がりが鋭い分，獲得効率が頭打ちになるのも早くなるため，n が小さいほど情報収集に使う割合の上限は小さくなる．

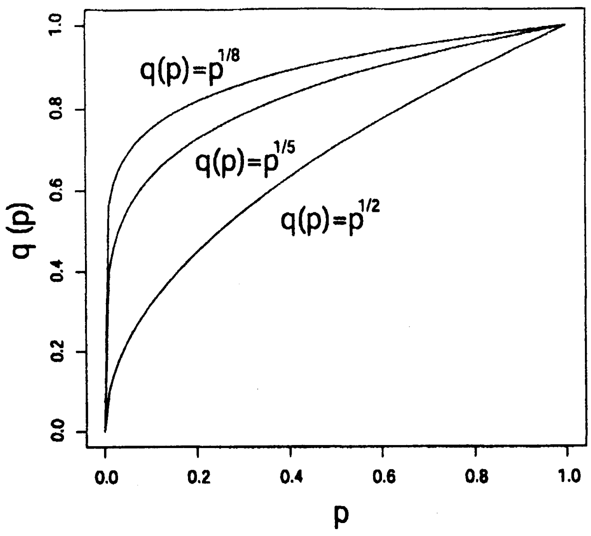

図 5: n の値と $q(p)$ の形（$n<1$）

2.3.2 II 型の場合（$n>1$）

II 型の場合，

$$p_0 = 0, \frac{n}{n+1} \tag{28}$$

である．また，

$$\begin{aligned} p_{\min} &= \frac{n-1}{n+1}, \qquad (29) \\ g(p_{\min}) &= -\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} \qquad (30) \end{aligned}$$

である．p_0 が 2 つ存在することから，$R/S \to \infty$ に対する最適値をとる $p*$ が 2 つ存在することになる．一つは情報収集に労力を全く使わない ($p=0$) 場合，もう一つは $p=\frac{n}{n+1}$ の労力を使う場合である．また，$g(p_{\min}) < p < 0$ の範囲の全ての R/S 値について，最適値をとる $p*$ が 2 つ存在する．$p_{\min}$ は，n が大きくなるにつれて高くなる．n が大きくなるほど，関数 $q(p)$ は立ち上がりが遅く鋭くなる（図 6）．立ち上がりが遅くなると，ある程度情報に労力を割くまでは確実性が得られなくなるため，2 つの最適値の差が大きくなってくると考えられる．

2.4 2 章のまとめ

このように，限られた労力（または時間・金銭など）を配分して，獲得資源を最大化する問題は幅広い分野で議論されてきた．例えば，生物学における採餌行動の研究 (Charnov, 1976) [1] や，経済学における投資戦略の研究などが挙げられる．これらの研究では，採餌効率が時間とともに下がってくることを前提としているため，効用関数は I 型である．

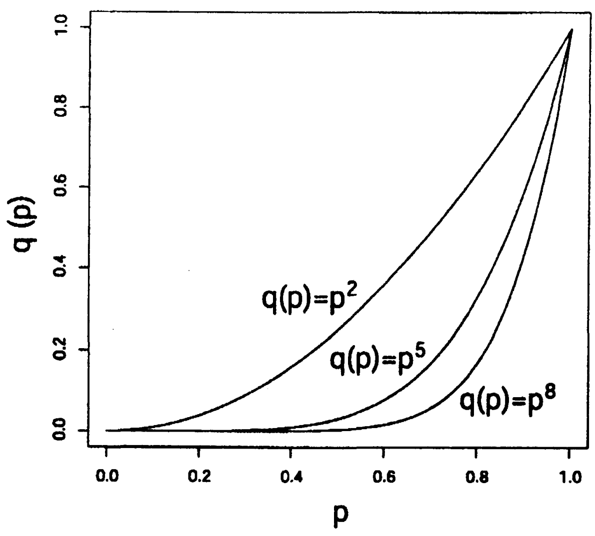

図 6: n の値と $q(p)$ の形 $(n > 1)$

しかし今回は，情報の確実性の獲得効率という主体の性質に依存するパラメータを採用しているため II 型のような下に凸 (convex) の形を取る可能性を考えることができる．

これを実用的にとらえるならば，成功・失敗それぞれの場合に得られる資源量の見極めが重要であるといえる．R と S に大差がなくなってくると，一様に情報収集のコストは下がってくるのではないかと考えられたが，II 型では最適値のシフト方向が一方向ではなく，一定の R/S の範囲内では，一点に収束する場合があることがわかった．

3 基本モデルの拡張

2 章で導入した基本モデルは，情報取得への投資配分が大きいほど確実な情報が得られることとし，得られた情報の確実性が高いほど資源獲得に成功しやすいとしていた．さらに，“どのような”内容であろうと，主体はそれに従うという前提が含まれていた．そのため，獲得資源量は情報が“どれだけ”確実か $(= q(p))$ のみによって決定されていた．しかし，資源獲得の際には，得られた情報が「どれだけ確実なものといえるか」だけでなく，「どのような内容であるか」という観点も重要になるだろう．情報の様式が多様化した現代においては，与えられる情報の内容も多様であり，“どのような”情報が得られるかを無視することはできないと考えられる．

そこで，本章では，情報に誤りがある場合 (3.1 節)，選択肢が複数ある場合 (3.2 節)，情報のみに左右されずに自己判断も考慮に入れる場合 (3.3 節) などについて考察していく．(本稿では十分考察できなかったが，戦略ならびに情報が確率として与えられる場合の拡張可能性についても 3.4 節で議論する.) それらによって，基本モデルの枠組みで説明できる範囲の広がりも明らかになる．

3.1 情報に誤り（ないし嘘）がある場合

基本モデルには，情報が正確であるという暗黙の前提があった．そこで本節では，その拡張として，得られた情報に誤りがある場合について考察する．それは，情報発信者に意図した“嘘”がある場合と考えてもよい．その意図があるかないかは，情報発信者と意思決定者の間の利得関係に相互作用があるゲーム的な状況であれば問題となってくるだろうが，本稿で考察しているような最適化問題として考えられる範囲においては，意図の有無とは無関係である[6]．

情報提供者の情報に確率 α （$0 \leq \alpha \leq 1$）で嘘が含まれる場合を，基本モデルと対照させる形で議論しよう．

3.1.1 情報に嘘がない場合

まずは，基本モデルを情報に嘘がない場合（情報に事象が確実に従う場合）と考えて，再掲しておこう．最終的に得られる資源量の期待値 $f(p)$ は（4）より，

$$f(p) \quad = \quad [(R-S)q(p)+S](1-p)$$

であり，その変化率 $f'(p)$ は（7）より，

$$f'(p)=(R-S)q'(p)(1-p)-(R-S)q(p)-S$$

である．ここで，$f'(p)=0$ の解が $p=p*$ である．これを変形すると，

$$q'(p)(1-p)-q(p)-\frac{S}{R-S}=0 \tag{31}$$

が得られる．

ここからは，2章の基本モデルを取り扱ったような作図による最適値の存在範囲の議論ではなく，具体的な $p*$ を求めていく方向で議論していこう．(そのために，なるべく具体的な関数形 $q(p)=p^n$ を考え，パラメータ R, S, n なども具体的なパラメータで議論していくことにする.)

具体的に，式（21）の $q(p)=p^n$ を当てはめると，$f(p)$ は，

$$f(p)=-(R-S)p^{n+1}+(R-S)p^n-Sp+S \tag{32}$$

となるし，$f'(p)=0$ という関係式は，

$$f'(p)=-(R-S)(n+1)p^n+(R-S)np^{n-1}-S=0 \tag{33}$$

のようになる．この解が $p=p*$ である．

$$(n+1)p^n-np^{n-1}+\frac{S}{R-S}=0 \tag{34}$$

と変形しておいた方が見通しが良い．

さらに具体的にするために，$n=1,1/2,2$ の場合を考えてみる．

[6]ゲーム的状況を扱うゲーム理論は，もともと経済行動を分析するためにつくられたが [8]，現在では政治学・社会心理学など，他の社会科学でも取り入れられている．生物学においても，生態学・進化学のようなマクロな生物学，さらには，ミクロな生物学においても取り入れられている [2, 3, 9]．本稿のような研究も将来的には，ゲーム的状況を扱う方向へと発展させていくことが必要であると考える．生物学における最適化とゲーム理論による解析については [4] を参照．

$n = 1$ の場合

$n = 1$ の場合は，$q(p) = p$ であり線形な関数である．

$$p* = \frac{R - 2S}{2R - 2S} \tag{35}$$

となることが容易にわかる．この $p*$ が $0 < p* < 1$ の範囲にあるかどうかは，パラメータの値次第である．(情報の有無による利得の値の増減による．) $R > 2S$ ならば $p* > 0$ が実現されるから，内部に最適値を持つことになるし，$R < 2S$ ならば $p* = 0$（情報を得ないこと）が最適となる．$R > 0$ であれば常に $p* < 1$ が実現される[7]．

$n = 1/2$ の場合

$n = 1/2$ の場合は，$q(p) = p^{1/2}$ でありＩ型（1）である．(33）は，$\sqrt{p}$ の二次式となるから，

$$\sqrt{p*} = -\frac{S}{3(R - S)} \pm \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{S^2}{9(R - S)^2}} = \frac{-S \pm \sqrt{S^2 + 3(R - S)^2}}{3(R - S)} \tag{36}$$

となる．極値を持つ $p*$ が二つあるわけだから，この二つの解について，$p_{low} < p_{high}$ とし，その p_{low}, p_{high} がそれぞれ $0 < p* < 1$ の範囲にあるかどうかを，パラメータ R, S の大きさによって議論すればよい．まず，$0 < p*$ についてみてみると，常に $p_{low} < 0$ である一方，$p_{high} > 0$ が実現されるのは $R > S$ の場合であり，こちらも常に成り立つ．次に，$p* < 1$ については，$p_{low} < 0$ だから議論する必要がない．一方，$p_{high} < 1$ となるのも，$R(R - S) > 0$ が条件である．$R > S$ はもともと仮定していたので，$R > 0$ ということだけで $p_{low} < 0 < p_{high} < 1$ となり，$f(p)$ の極値 $p*$ は $0 < p* < 1$ に一つだけあることになる．(33）に $n = 1/2$ を当てはめた式の $p^{1/2}$ の係数 $-3(R - S)/2 < 0$ だから，$f(p)$ すなわち（32）の最高次 $p^{3/2}$ の係数が負で，p_{low} が極小値をとり，p_{high} が極大値をとる[8]．したがって，$f(p)$ の最適化を考えると，情報を得る割合が p_{high} のとき最適値をとることがわかる．

$n = 2$ の場合

$n = 2$ の場合は，$q(p) = p^2$ でありII型 (2) である．

$$p* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{3S}{R-S}}}{3} \tag{37}$$

となることが容易にわかる．極値を持つ $p*$ が二つあるわけだから，この二つの解について，$p_{low} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{3S}{R-S}}}{3}$，$p_{high} = \frac{1+\sqrt{1-\frac{3S}{R-S}}}{3}$ とする．この $p*$ が $0 < p* < 1$ の範囲にあるかどうかは，パラメータの値次第である．(情報の有無による利得の値の増減による．) $0 < p*$ に

[7]仮に $R < 0$ としてしまうと，$p* = 1$ となる．情報の有無にかかわらず負の利得しか得られない場合は，情報を得ることに全労力を割くのが最適ということになる．
[8]本来もう少し厳密な議論が必要である．

ついては，常に $p_{high} > 0$ が実現されるし，$S > 0$ であれば $p_{low} > 0$ が実現される．$p* < 1$ については，$R > 0$ ならば $p_{high} < 1$ が実現されるし，常に $p_{low} < \frac{1}{3}$ だから $p_{low} < 1$ が実現される．極値を二つ持つ場合だから，極小値と極大値になっているわけである．この場合は，(33) に $n = 2$ を当てはめた式の p^2 の係数 $-3(R-S) < 0$ だから，$f(p)$ すなわち (32) の最高次 p^3 の係数が負で，p_{low} が極小値をとり，p_{high} が極大値をとる．したがって，$f(p)$ の最適化を考えると，$f(0) = S$ と $f(p_{high})$ という二つの可能性があることになる．

3.1.2 情報に嘘がある場合

では次に，情報に嘘がある場合の解析に入る．基本モデルにおける $q(p)$ を $\alpha q(p)$ で置き換えればよい[9]．すると，最終的に得られる資源量の期待値 $f(p)$ の関数も (4) とは異なり，

$$f(p) \quad = \quad [(R-S)\alpha q(p) + S](1-p) \tag{38}$$

となる[10]．したがって，であり，その変化率 $f'(p)$ は，

$$f'(p) = (R-S)\alpha q'(p)(1-p) - (R-S)\alpha q(p) - S \tag{39}$$

である．

具体的に，式 (21) の $q(p) = p^n$ を当てはめると，$f(p)$ は，

$$f(p) = -(R-S)p^{n+1} + (R-S)p^n - Sp + S \tag{40}$$

となるし，$f'(p) = 0$ という関係式は，

$$f'(p) = -(R-S)(n+1)\alpha p^n + (R-S)n\alpha p^{n-1} - S = 0 \tag{41}$$

のようになる．この解を求める手順として，(34) と比較すると，

$$(n+1)p^n - np^{n-1} + \frac{S}{\alpha(R-S)} = 0 \tag{42}$$

と書けるから，嘘の有無による $f(p)$ の最適化結果の相違がわかる．結局，α によって少し関数のパラメータが変わるので，$p*$ の値が少しずれてくるが，解を求める手続としては本質的に差異はない．情報に嘘があっても，α が大きいほど (1に近いほど) 嘘がない場合に近いわけである．α が小さければ小さいほど，すなわち，情報に嘘がある確率が大きいほど $p*$ の値が小さくなってくるわけだから，情報コストに投資しないほうが良いことがわかる．

---

[9] この段階で，$q(0) = 0$ は保存されているが，$q(1) < 1$ となってくる点が基本モデルとは異なる．先の脚注でも若干触れている観点である．

[10] $q(p)$ の関数を $q(1) < 1$ でも可能として，$q(p)$ を置き直せば，基本モデルにおける式 (4) と同じとしても構わない．数学的には等価だとしても，何を表すかによって数式の表現の仕方は異なってくるものである [10] から，その点を意識することが重要である．

3.2 選択肢が複数ある場合

これまでの基本モデルでも，3.1 節の嘘を含むモデルでも，意思決定者の選択は情報を得る割合 p だけであり，幾つかの選択肢から選ぶという情報は想定していなかった．本節では，選択肢が複数ある場合について考察する[11]．

情報のパラメータを新たに導入する．これまでとは違って，資源獲得の際に選択可能な戦略が複数個（n 個）存在することとし，情報の内容も n 通りあるとすると，意思決定者が情報収集に割合 p だけのコストを払ったときに得られる情報は，

$$\mathbf{J}(p) \quad = \quad (J_1(p), J_2(p), \cdots, J_n(p)) \tag{43}$$

の形で与えられるものとする．ここで $\mathbf{J}(p)$ とおいていた情報の内容は，2 章で導入した基本モデルにおける $q(p)$ の概念を拡張したものである．$\mathbf{J}(p)$ は，資源獲得の際に有用な情報が書かれているものとし，

$$\mathbf{J}(0) = (0, 0, \cdots, 0)$$
$$\mathbf{J}(1) = (1, 1, \cdots, 1)$$

とする．$\mathbf{J}(p)$ は単調増加とする．すなわち，$\frac{d\mathbf{J}(p)}{dp} = \left(\frac{dJ_1(p)}{dp}, \frac{dJ_2(p)}{dp}, \cdots, \frac{dJ_n(p)}{dp}\right)$ の全ての成分について，$\forall k$ で $\frac{dJ_k(p)}{dp} \geq 0$ ということである．

さらに，選択肢が複数あったときの，情報を得た場合にそれぞれの選択肢における利得がどのように変わるかを定義しておきたい．それ自体は容易で，基本モデルの R と S を，それぞれ

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} \tag{44}$$

に置き換えればよい．ここで $\forall k$ について $R_k > S_k$ を仮定する．

このように拡張しても，情報の確実性に対応して得られる資源量の期待値 $E[p]$ は (3) と同様に表せばよいから，

$$E[p] \quad = \quad \mathbf{J}(p) \cdot \mathbf{R} + \{\mathbf{1} - \mathbf{J}(p)\} \cdot \mathbf{S} \tag{45}$$

となる．ここで，$\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)$ である．よって，最終的に得られる資源量の期待値 $f(p)$ は，以下のように表せる．

$$\begin{aligned} f(p) &= E[p]\{1-p\} \\ &= [\mathbf{J}(p) \cdot \mathbf{R} + \{\mathbf{1} - \mathbf{J}(p)\} \cdot \mathbf{S}]\,(1-p) = [\mathbf{J}(p) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{S}) + \mathbf{S}]\,(1-p) \end{aligned} \tag{46}$$

より明確にするために，成分表示すると，

$$f(p) \quad = \quad \left[(J_1(p), J_2(p), \cdots, J_n(p)) \begin{pmatrix} R_1 - S_1 \\ R_2 - S_2 \\ \vdots \\ R_n - S_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} \right] (1-p)$$

[11] 選択肢が複数ある，とすることで，ゲーム的状況を記述するための布石としたいという考えがある．

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} J_k(p)\{R_k - S_k\} + \sum_{k=1}^{n} S_k\right)(1-p)$$

ということになる．

これをもとに，単調性の条件を満たすような $\mathbf{J}(p)$ を作ってやれば，この最適化問題も 2 章における基本モデルの解析と同様の手順で解いてやることができる．$f(p)$ はあくまで p という 1 変数の関数だから，多次元にしてはいるが，多変数にしたわけではないと言える．

3.3 自己判断を考慮に入れた場合

次に，自己判断を考慮するように拡張してみよう．複数の選択肢があるのだが，情報を鵜呑みにせずに自己判断によっても決定が左右される場合を考える．

選択肢 $1, 2, \cdots, n$ の情報 $\mathbf{J}(p)$ をどのくらい受け入れるかという自らの信念 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ を設定する．(ただし，$\forall k$ について $0 \le b_k$ のみを仮定し，$b_k \le 1$ は仮定しない．情報を鵜呑みにしないと逆に，情報を過剰に受け入れるという場合も考えたいからである．) この場合，b_k が $J_k(p)$ の係数としてかかってくると考える．

$f(p)$ を考えるときには，$J_k(p)$ を $J_k(p)b_k$ で置き換えたモデルを考えることになる．この場合の $f(p)$ を成分表示すると，

$$f(p) = \left(\sum_{k=1}^{n} J_k(p) b_k \{R_k - S_k\} + \sum_{k=1}^{n} S_k\right)(1-p) \tag{47}$$

となる．これを，ベクトル表示させるためには，少々難があり，行列表示してやる必要がある．

$$f(p) = [\mathbf{J}(p)\mathrm{diag}(\mathbf{b})(\mathbf{R} - \mathbf{S}) + \mathbf{S}](1-p) \tag{48}$$

ここで，$\mathrm{diag}(\mathbf{b})$ とは，$\mathbf{b}$ の各要素を対角成分として持ち，対角成分以外が全て 0 の行列である．

本節で扱ってきた，自己判断も考慮に入れる場合も，3.2 節における選択肢が複数ある場合の解析に帰着される．3.2 節のモデルの解析は基本モデルを複数の場合に拡張しただけであったから，本章のモデルも基本モデルの解析に帰着されることになる．それは，3.1 節における情報に嘘がある場合とない場合とで，解析方法に本質的な差異がなかったことと同様である．

3.4 その他の拡張について

情報を鵜呑みにせず，自己判断を考慮する余地があるのは，情報に間違いがある可能性があったり，その他何らかの要因で，情報を得たとしても利得が増えるとは限らない場合である．このとき，利得 $\mathbf{R}, \mathbf{S}$，すなわち (44) において，$R_k > S_k$ は必ずしも成り立たないものとし，全ての選択肢において $R_k \le S_k$ の可能性もありうるとする必要がある．これまでとは異なり，情報が与えられた場合に利得が上がるとは限らないため，$\mathbf{J}(p)$ の意味合いも変わってきて，$J_k(p)$ とは k という選択肢をとれ，という指示のようなものと捉

える必要がある．さらに，$1, 2, \cdots, n$ の選択肢の情報 $\mathbf{J}(p)$ をどのくらい受け入れるかという自らの信念 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ を設定すると（この場合，$\mathbf{b}$ の全ての要素は $0 \leq b_k \leq 1$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ である．），選択肢 k に対する選択可能性は，情報 $J_k(p)$ と信念 b_k との平均（ないし何らかの重み付け平均）とすることになる．

この場合も非常に興味深いモデルになるのだが，基本モデルのような $R_k - S_k > 0$ や $J_k(p)$ の単調増加などの仮定が崩れてしまっているので，2 章と同様のモデルの凸性などを仮定した解析はできなくなり，別の議論が必要となる．

別の発展可能性としては，意思決定者の選択が確率的に与えられたり，情報が確率として与えられるようなときを考察することであろう．そのときには，個人の選択もゲーム理論における混合戦略のようにそれぞれの純粋戦略の組合せとして考えてやる必要がある．その場合には，戦略 $\mathbf{L} = (L_1, L_2, \cdots, L_n)$ に対応するものを考える．ここで，混合戦略を意識しているから，

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = 1 \tag{49}$$

とする．そこで，情報 $\mathbf{J}(p)$ をどのように構成するかが問題となる．3.2 節においては，$\mathbf{J}(0) = (0, 0, \cdots, 0)$, $\mathbf{J}(1) = (1, 1, \cdots, 1)$，$\mathbf{J}(p)$ は単調増加などを仮定していたが，本節のような場合にはそうではなく，(49) と同様に，

$$\sum_{k=1}^{n} J_k(p) = 1 \tag{50}$$

のような仮定をおいてやりたい．この場合に，$f(p)$ を構成するためにどのようなモデリングを経てやればよいかは現段階のアイデアは確定的ではなく，今後の検討課題としたい．

4 まとめと今後の発展

情報入手にどれだけコストをかけるべきかという問題に対して，獲得主体の判断を排して情報の確実性のみに依存する場合，獲得資源を最大にする情報コスト $p*$ は，最適値問題として求めることができた．資源獲得の際に複数の選択可能な戦略が存在する場合，与えられる情報の内容が資源獲得に関わってくることが示された．ただし最終的な資源量を左右するのは，資源獲得の主体の側が持つパラメータであり，このパラメータが異なれば，情報投資コストの最適値が異なってくることが示された．このように情報の特性を考慮したモデルを構築したことによって，資源獲得の際に情報を生かす最適値の存在とそれを求めるプロセスが明らかになった．

また本研究で提唱したモデルは一般性が高く，多くの主体間で情報コストの最適値の比較が可能となり，多様な性質を持つ資源獲得主体の共存が示せる可能性が示唆された．今後は主体間の相互作用を考慮し，具体的な競争相手の挙動も考慮したゲーム理論的な考察[12]，個体差に関する考察 [12]，主体の特性が遺伝的に継承されるモデルや，環境変動などを考慮したモデルを開発する予定である．

[12] [11, chap.5] は「情報の価値」に関する考察がある．また数理生物学においては [6, 7] もある．

参考文献

[1] Eric L. Charnov. Optimal foraging, the marginal value theorem. *Theor. Popul. Biol.*, Vol. 9, pp. 129–136, 1976.

[2] 池上高志, 松田裕之（編）. ゲーム理論のフロンティア：その思想と展望をひらく. 臨時別冊・数理科学, SGC ライブラリ 44. サイエンス社, 東京, dec 2005.

[3] 今井晴雄, 岡田章（編）. ゲーム理論の新展開. 勁草書房, 東京, apr 2002.

[4] 巌佐庸. 数理生物学入門：生物社会のダイナミックスを探る. 共立出版, 東京, mar 1998.

[5] John Maynard-Smith. *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1982. (寺本 英・梯 正之訳. 1985.『進化とゲーム理論』 産業図書, 東京.).

[6] 中丸麻由子. 嘘の情報は人間の社会行動の進化にどのように影響するのか, pp. 147–155. 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリー, No. 44. サイエンス社, 東京, 2005.

[7] Mayuko NAKAMARU and Akira SASAKI. Can transitive inference evolve in animals playing the hawk-dove game? *J. Theor. Biol.*, Vol. 222, No. 4, pp. 461–470, jun 2003.

[8] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of games and economic behavior.* Wiley, New York, 1944.

[9] 佐伯胖, 亀田達也（編）. 進化ゲームとその展開. 日本認知科学会編認知科学の探求. 共立出版, 東京, oct 2002.

[10] 瀬野裕美. 数理生物学：個体群動態の数理モデリング入門. 共立出版, 東京, jul 2007.

[11] 鈴木光男. 新装版ゲーム理論入門. 共立全書, No. 239. 共立出版, 東京, feb 2003.

[12] M. Wolf, G. S. vanDoorn, O. Leimer, and F. J. Weissing. *Life-history trade-offs favour the evolution of animal personalities*, Vol. 447. 2007.